ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THÙY DƯƠNG

TÍNH ỔN ĐỊNH HỮU HẠN THỜI GIAN VÀ BỊ CHẶN HỮU HẠN THỜI GIAN CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THÙY DƯƠNG

TÍNH ỔN ĐỊNH HỮU HẠN THỜI GIAN VÀ BỊ CHẶN HỮU HẠN THỜI GIAN CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Mai Viết Thuận

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm gần đây, giải tích phân thứ và hệ phương trình vi phân phân thứ đã nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học do những ứng dụng của chúng trên nhiều lĩnh vực của khoa học kỹ thuật. Nhiều hệ thống trong kỹ thuật, chẳng hạn như hệ thống viscoelastic, sự phân cực điện môi (dielectric polarization), sự phân cực điện cực (the electrode-electrolyte polarization), mô hình mạng nơ ron, được mô tả tốt hơn và chi tiết hơn bởi hệ phương trình vi phân phân thứ [4, 6, 13]. Như chúng ta đã biết tính ổn định là một tính chất quan trọng của mọi hệ động lực. Do đó bài toán nghiên cứu tính ổn định theo nghĩa Lyapunov của hệ phương trình vi phân phân thứ đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Nhiều công trình chất lượng đã được công bố trên các tạp chí quốc tế uy tín trong những năm gần đây (xem [5, 7, 11] và các tài liệu tham khảo trong đó).

Trong các ứng dụng thực tế, ta luôn cần phải xem xét dáng điệu của véc tơ trạng thái của hệ thống mô tả bởi hệ phương trình vi phân phân thứ trong một thời gian hữu hạn, khi đó các giá trị lớn của véc tơ trạng thái là không thể chấp nhận. M.P. Lazarević cùng các cộng sự [9, 10] là những tác giả đầu tiên nghiên cứu tính ổn định hữu hạn thời gian (FTS) cho hệ động lực mô tả bởi các hệ phương trình vi phân phân thứ. Khác với bài toán ổn định theo nghĩa Lyapunov, nghiên cứu dáng điệu của véc tơ trạng thái của hệ phương trình vi phân phân thứ trên một khoảng thời gian vô hạn, khái niệm ổn định hữu hạn thời gian nghiên cứu dáng điệu của véc tơ trạng thái trong một khoảng thời gian hữu hạn. Một số kết quả thú vị về bài toán nghiên cứu tính ổn định hữu hạn thời gian và bị chặn trong thời gian hữu hạn đã được công bố trên các tạp chí quốc tế uy tín cho một số lớp hệ phương trình vi phân phân thứ như lớp hệ phương trình mạng nơ ron phân thứ [3, 14, 15], lớp hệ tuyến tính phân thứ [13], lớp hệ phân thứ có trễ [12].

Luận văn tập trung nghiên cứu tính ổn định hữu hạn thời gian và bị chặn hữu hạn thời gian của một số lớp hệ phương trình vi phân phân thứ. Luận văn gồm có 3 chương gồm những nội dung như sau:

Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm về giải tích phân thứ như tích phân và đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, tích phân và đạo hàm phân thứ Caputo. Sau đó, chúng tôi trình bày một số định lí tồn tại và duy nhất nghiệm. Cuối chương, chúng tôi trình bày một số bổ đề bổ trợ. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [4, 5, 7, 8].

Trong chương 2 của luận văn, chúng tôi trình bày một số tiêu chuẩn cho tính ổn định hữu hạn thời gian và bị chặn hữu hạn thời gian của của lớp hệ tuyến tính phân thứ. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ tài liệu [13].

Trong chương 3 của luận văn, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định hữu hạn thời gian và bị chặn hữu hạn thời gian của một số lớp hệ phương trình vi phân phân thứ có nhiễu phi tuyến. Kết quả này mở rộng kết quả trong bài báo [13]. Đây chính là nội dung nghiên cứu của luận văn.

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành luận văn thạc sĩ một cách hoàn chỉnh, bên cạnh sự nỗ lực cố gắng của bản thân còn sự hướng dẫn nhiệt tình của quý thầy cô cũng như sự động viên ủng hộ của gia đình và bạn bè trong suốt thời gian học tập nghiên cứu và thực hiện luận văn thạc sĩ.

Với tình cảm chân thành, tôi xin gửi lời cảm ơn đến toàn thể quý thầy cô trong khoa Toán - Tin và khoa sau đại học Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu và cho đến khi thực hiện đề tài luận văn.

Đặc biệt, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến người hướng dẫn khoa học TS. Mai Viết Thuận, người đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo và giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn đến Hiệu trưởng cùng toàn thể thầy, cô giáo trường THPT Thanh Lâm đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin dành tất cả sự yêu thương và lời cảm ơn vô hạn tới gia đình, bố mẹ, cô, cậu, các anh chị, em và người thân luôn là niềm động viên mạnh mẽ giúp tôi thực hiên luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	tập các số thực, số thực không âm tương ứng
$\mathbb{R}^n$	không gian vec tơ thực Euclide n chiều
$A^\top$	ma trận chuyển vị của ma trận A
I	ma trận đơn vị
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$= \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min}(A)$	$= \min\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\|A\|$	chuẩn phổ của ma trận $A, \|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$
$A \geq 0$	ma trận A nửa xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A \geq B$	nghĩa là $A - B \geq 0$
$A > 0$	ma trận A xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
$LMIs$	bất đẳng thức ma trận tuyến tính (Linear matrix inequalities)
$\|x\|$	chuẩn Euclide của véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$C([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên$[a,b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$AC^m[a,b]$	không gian các hàm liên tục tuyệt đối cấp m trên$[a,b]$
${}_{t_0}I_t^\alpha$	toán tử tích phân phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp α
$\Gamma(x)$	hàm Gamma
$E_{\alpha,\beta}$	hàm Mittag-Leffler hai tham số
$\lceil\alpha\rceil$	số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về tính ổn định và ổn định hóa của các hệ phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân có trễ. Chúng tôi cũng trình bày một số kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận văn cho các chương sau. Kiến thức sử dụng ở chương này được tham khảo ở [4, 5, 7, 8].

1.1. Giải tích phân thứ

1.1.1. Tích phân phân thứ

Trong mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về khái niệm tích phân phân thứ. Khái niệm tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường.

Định nghĩa 1.1. ([8]) Cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$_{t_0}I_t^{\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad t \in (a, b],$$

trong đó $\Gamma(.)$ là hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \alpha > 0$.

Trong Định nghĩa 1.1 khi $\alpha = 0$, chúng ta quy ước $_{t_0}I_t^{\alpha} := I$ với I là toán tử đồng nhất. Sự tồn tại của tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α với $0 < \alpha < 1$ được cho bởi định lí sau

Định lý 1.1. ([4]) *Giả sử $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi* *đó, tích phân* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t)$ *tồn tại với hầu hết* $t \in [a,b]$. *Hơn nữa,* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x$ *cũng là một hàm khả tích.*

Ví dụ sau đây cho ta tích phân phân thứ của một số hàm cơ bản.

Ví dụ 1.1. ([4])
(i) Cho $x(t) = (t-a)^{\beta}$, ở đây $\beta > -1$ và $t > a$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}, \quad t > a. $$

(ii) Cho $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda > 0$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \lambda^{-\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}, \quad t > 0. $$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày định nghĩa của hàm Mittag-Leffler.

Định nghĩa 1.2. [7] Cho $\alpha \in \mathbb{C}$, một hàm $E_{\alpha} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi

$$ E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, $$

được gọi là hàm Mittag-Leffler một tham số.

Nhận xét 1.1. *Trong Định nghĩa* 1.2, nếu cho $\alpha = 1$, ta có

$$ E_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z. $$

Do đó hàm Mittag-Leffler chính là mở rộng của khái niệm hàm mũ.

Định nghĩa 1.3. [7] Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, một hàm $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi

$$ E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, $$

được gọi là hàm Mittag-Leffler hai tham số. Các hàm Mittag-Leffler nhận giá trị ma trận được định nghĩa hoàn toàn tương tự, tức là

$$ E_{\alpha,\beta}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}. $$

Các tính chất của hàm Mittag-Leffler một tham số, hai tham số đã được trình bày chi tiết trong cuốn sách chuyên khảo của Kilbas A.A [8].

1.1.2. Đạo hàm phân thứ

Mục này trình bày một cách ngắn gọn về đạo hàm Riemann–Liouville và đạo hàm Caputo. Đây là hai loại đạo hàm được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực.

Định nghĩa 1.4. ([7]) *Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi*

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} x(t) := \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_{t_0}I_t^{n-\alpha} x(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}x(s)ds, $$

trong đó $n := \lceil \alpha \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $\frac{d^n}{dt^n}$ là đạo hàm thông thường cấp n.

Ví dụ 1.2. Cho hàm bước đơn vị (unit-step function)

$$ f(t) = \begin{cases} 1, \text{nếu} \quad t \geq 0 \\ 0, \text{nếu} \quad t < 0. \end{cases} $$

Bằng cách sử dụng Định nghĩa 1.4, ta tính đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $f(t)$ là

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

Trước khi trình bày điều kiện cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, chúng tôi nhắc lại một số kết quả sau.

Cho $[a,b]$ là một khoảng hữu hạn trong $\mathbb{R}$. $AC[a,b]$ là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên $[a,b]$. Kolmogorov và Fomin đã chỉ ra mối liên hệ giữa các hàm tuyệt đối liên tục và các hàm khả tích Lebesgue như sau:

$$ f(t) \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(s)ds \quad (\varphi(s) \in L(a,b)), $$

do đó một hàm tuyệt đối liên tục $f(t)$ có đạo hàm $f'(t) = \varphi(t)$ hầu khắp nơi trên $[a,b]$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa lớp hàm $AC^n[a,b]$ như sau:

$$ AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}f)(t) \in AC[a,b] \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right)\}. $$

Mệnh đề sau đây cho ta một số đặc tính của lớp hàm $AC^n[a,b]$.